Dr. Martin Friesen & Jonas Kremer SS 2018

Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei m^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_{m^*}$ die zugehörige σ-Algebra. Sei f_n eine Folge von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen und $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ existiere m-fast überall. Zeigen Sie, dass f $\mathcal{A}_{m^*}$-messbar ist.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{A}$-messbar mit $f_{n+1} \leqslant f_n$. Zeigen Sie, dass

$$\int \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, die Riemann-integrierbar über $(-\infty, \infty)$ ist, aber nicht nicht Lebesgue-integrierbar über $(-\infty, \infty)$ ist.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Sei $\Omega := [0, 2\pi]$. Bestimme, falls existent, den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

in den folgenden Fällen.

(a) Es sei $\mu := \delta_{\pi/2}$ und $f_n(x) := (\sin x)^n$.

(b) Es sei $\mu := \delta_{3\pi/2}$ und $f_n(x) := (\sin x)^n$.

(c) Es sei $\mu := m$ und $f_n(x) := (\sin x)^n$.

(d) Es sei $\mu := m$ und $f_n(x) := x^n$.

Hinweis: Vergleichen Sie die Integrale aus Teil (c) und (d) mit dem Riemann-Integral und schätzen sie geschickt ab. Die Aufgabe sollte ohne Verwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz gelöst werden.